

# VALOR TEMPORAL DEL DINERO EXTENSIONES DE LAS HERRAMIENTAS DE ENSEÑANZA: LA INCLUSIÓN DE LAS ANUALIDADES CRECIENTES

Terrance Jalbert, University of Hawaii Hilo  
Jonathan D. Stewart, Abilene Christian University

## RESUMEN

*Investigaciones anteriores desarrollan herramientas para ayudar a los profesores a enseñar conceptos sobre el valor del dinero en el tiempo. Estas herramientas guían sistemáticamente a los estudiantes a través de preguntas para identificar la técnica adecuada para resolver un problema. Este documento amplía estas herramientas incorporando anualidades crecientes en el análisis y brindando a los usuarios capacidades de cálculo adicionales. Este documento desarrolla una herramienta visual que brinda a los usuarios un método fácil para identificar problemas de valor del dinero en el tiempo. El análisis muestra cálculos para anualidades crecientes, incluidos algunos cálculos que antes no estaban disponibles. El documento examina los libros de texto para identificar si las anualidades crecientes se han incorporado en la pedagogía de la educación empresarial y cómo.*

**PALABRAS CLAVE:** Valor del Dinero en el Tiempo (TVM), Herramientas, Anualidades Acumuladas, Educación Empresarial

## TIME VALUE OF MONEY TEACHING TOOL EXTENSIONS: THE INCLUSION OF GROWING ANNUITIES

### ABSTRACT

*Earlier research develops tools to assist professors in teaching time value of money concepts. These tools systematically walk students through questions to identify the appropriate technique to solve a problem. This paper extends these tools by incorporating growing annuities into the analysis and giving users additional calculation capabilities. The paper develops a visual tool that provides users an easy method for identifying time value of money problems. The analysis shows calculations for growing annuities, including some previously unavailable calculations. The paper surveys textbooks to identify if and how growing annuities have been incorporated in business education pedagogy.*

**JEL:** M40, M41, M52, A22, A23

**KEYWORDS:** Time Value of Money, Tools, Grown Annuities, Business Education

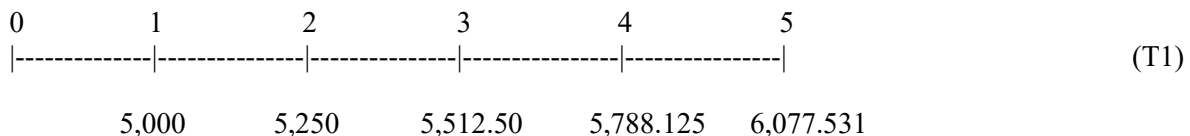
### INTRODUCCIÓN

Los conceptos del valor del tiempo del dinero (TVM, por sus siglas en inglés) han resultado difíciles de comunicar para los educadores y de comprender para los estudiantes. Estas dificultades están documentadas en la literatura existente (Eddy y Swanson, 1996). Además, existe variabilidad en la pedagogía óptima entre los estudiantes (Bloom, 1956). Estos temas motivan la investigación para desarrollar herramientas de enseñanza de TVM que se adapten a las necesidades de varios profesores y

estudiantes. La presentación de libros de texto de los conceptos de TVM comúnmente utiliza enfoques inconsistentes y engañosos, como se señala en Jalbert (2002). La vaguedad y la imprecisión de los libros de texto complican la comprensión de los materiales por parte del usuario. Los esfuerzos para aclarar los procedimientos y cálculos ofrecen la posibilidad de mejorar la comprensión de los estudiantes y aumentar el dominio del tema.

Investigaciones anteriores brindan herramientas para simplificar el proceso de enseñanza de TVM y brindan a los estudiantes un enfoque sistemático para resolver problemas. Jalbert (2002) y Jalbert, Jalbert y Chan (2004) desarrollaron por primera vez una herramienta de selección de técnicas visuales que ayuda a resolver problemas de TVM. Este trabajo fue ampliado por Martínez (2013), quien incluye funciones de calculadora junto con la presentación visual. Gardner (2004) sugiere revisiones a los cálculos de TVM que incluyen ignorar la terminología inicial y final generalmente asociada con la enseñanza de anualidades. Jalbert (2002) proporciona herramientas para resolver problemas de TVM que incluyen cinco preguntas que los usuarios deben responder y que conducen a seis técnicas candidatas. Jalbert, Jalbert y Chan 2004 simplifican el modelo al tratar las anualidades como un caso especial de un flujo de caja desigual. Ambas herramientas guían sistemáticamente a los usuarios a través de una serie de preguntas simples y directas para identificar las técnicas correctas necesarias para resolver los problemas de TVM. Este artículo amplía el trabajo de Jalbert (2002) y Jalbert, Jalbert y Chan (2004) ampliando la herramienta para incluir cálculos de anualidades crecientes.

Las anualidades crecientes, a veces llamadas anualidades incrementales, brindan cálculos útiles para necesidades específicas. Esta herramienta es especialmente útil para los jubilados que desean asegurar un flujo de pagos anuales que aumentan a la tasa de inflación a lo largo de su vida finita. Una anualidad creciente implica una serie de pagos, limitados en número, separados por la misma cantidad de tiempo, con cada pago sucesivo creciendo a una tasa de porcentaje constante. Para demostrar la naturaleza de una anualidad creciente, considere una serie de flujos de efectivo anuales. El primer flujo de efectivo es igual a \$5,000 recibidos dentro de 1 año a partir de hoy. Los flujos de efectivo aumentan en un 5 por ciento anual durante los siguientes 4 años, para un total de 5 pagos. La línea de tiempo 1 representa los flujos de efectivo.



Este documento examina los libros de texto de introducción a las finanzas en sus presentaciones de cálculo de anualidades crecientes. La encuesta también examina si los textos proporcionan una herramienta gráfica de selección de técnicas TVM. La presentación proporciona una demostración de los cálculos de anualidades crecientes, incluidos algunos cálculos nuevos no identificados previamente en la literatura. El documento proporciona a los instructores un método gráfico simple para presentar las técnicas del valor del dinero en el tiempo en un formato fácil de entender.

El resto del documento está organizado de la siguiente manera. En la siguiente sección proporcionamos una revisión de la literatura existente. La siguiente sección presenta una herramienta gráfica para enmarcar anualidades crecientes entre otras técnicas de TVM. En la siguiente sección se analizan los datos y la metodología utilizados. El documento continúa con una presentación de los resultados de nuestra encuesta de libros de texto. La siguiente sección presenta cálculos de anualidades crecientes. El documento se cerró con algunos comentarios finales y sugerencias.

## REVISIÓN DE LITERATURA

Existe poca literatura relacionada con la técnica de la anualidad creciente. Por lo tanto, relacionamos el trabajo aquí con la literatura existente sobre anualidades crecientes, así como con la literatura general sobre técnicas de valor del dinero en el tiempo. El documento se basa en esta investigación para desarrollar una nueva herramienta gráfica de selección de técnicas de valor del dinero en el tiempo (TVM). El documento también proporciona un recurso integral para el crecimiento de los cálculos de anualidades.

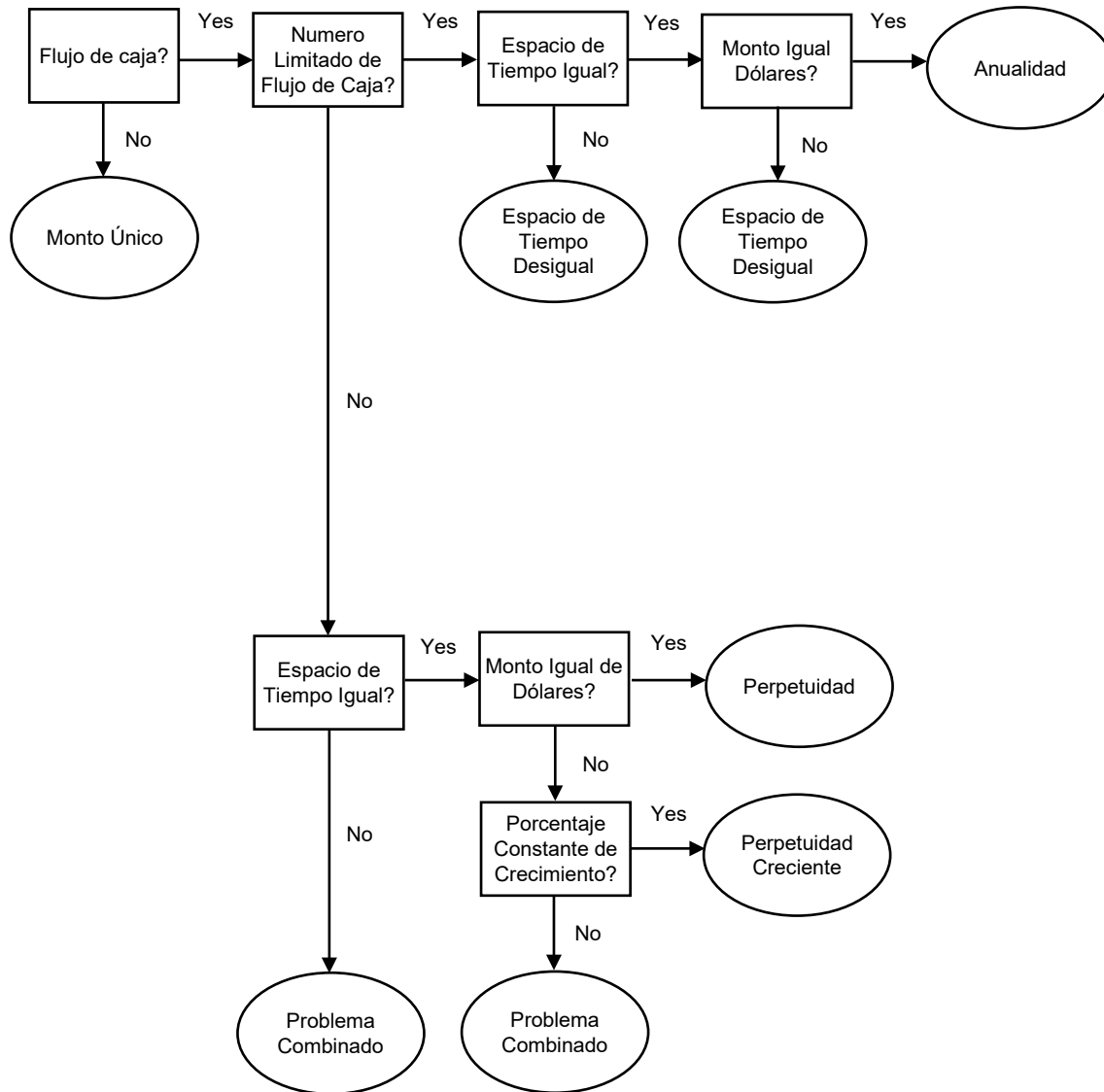
Taylor (1986) demostró cálculos de valor futuro para una anualidad ordinaria creciente y una anualidad vencida creciente. Hall (1996) analiza las anualidades crecientes en relación con las calculadoras financieras. Otros han proporcionado instrucciones sobre cómo completar los cálculos necesarios utilizando una calculadora financiera. Mayes (2023) demostró los cálculos necesarios utilizando una calculadora BAI Plus de Texas Instruments. Omni Calculator (2023) proporciona una herramienta en línea para resolver el valor futuro, los valores presentes y los pagos de anualidades crecientes. Michael's Law Firm (2023) proporciona la única herramienta conocida disponible públicamente para resolver la cantidad de pagos, la tasa de crecimiento y la tasa de descuento para anualidades crecientes.

Bagamery (2011) proporcionó un método para resolver problemas de anualidad crecientes que implica transformar un flujo nominal de pagos crecientes en un flujo de pagos decreciente. Argumentó que este enfoque hace que el enfoque de anualidad creciente sea más accesible para los usuarios. Ampliamos el trabajo de estos autores proporcionando cálculos adicionales relacionados con las anualidades crecientes.

Como se señaló anteriormente, Jalbert (2002) desarrolló una herramienta de enseñanza para ayudar a resolver problemas de valor del dinero en el tiempo (TVM) como se muestra en la Figura 1. La figura incluye cajas cuadradas y óvalos. Los usuarios evalúan cinco preguntas, sí o no, como se indica en los recuadros. Las cinco preguntas son: 1. ¿Existe una corriente de flujos de efectivo? 2. ¿Está limitado el número de flujos de caja? 3. ¿Hay un espacio de tiempo igual entre cada uno de los flujos de efectivo? 4. ¿Cada flujo de efectivo corresponde a la misma cantidad en dólares? y 5. ¿Crecen los flujos de efectivo a una tasa porcentual constante? Las respuestas a las preguntas conducen a los usuarios a un óvalo que indica la técnica adecuada para resolver un problema. La herramienta incluye seis técnicas candidatas. Responder las preguntas correctamente lleva a los usuarios sin ambigüedades a la técnica TVM correcta.

Para complementar el gráfico, Jalbert (2002) proporcionó un resumen de las características del flujo de caja para cada técnica. La Tabla 1, adaptada de Jalbert (2002), muestra las características de cada técnica del valor del dinero en el tiempo. Un indicador Sí implica que la técnica requiere la característica. Un indicador No indica que la técnica no requiere la característica.

Figura 1: Herramienta de Selección de Técnicas de Valor del Dinero (TVM) de Jalbert (2002)



Esta figura muestra la herramienta de selección de técnicas de valor temporal del dinero desarrollada en Jalbert (2002).

Tabla 1: Clasificación de los Problemas del Valor del Dinero en el Tiempo (TVM)

	Suma Única	Anualidad	Perpetuidad	Perpetuidad Creciente	Flujo de Efectivo Desigual
Serie de Flujos de Efectivo	No	Sí	Sí	Sí	Sí
Número limitado de flujos de efectivo	Sí	Sí	No	No	Sí
Cada flujo de efectivo es por una cantidad igual de \$	N / A	Sí	Sí	No	Sí No
Intervalo de tiempo igual entre flujos de efectivo	N / A	Sí	Sí	Sí	Sí No
Los flujos de efectivo crecen a una tasa de porcentaje constante	N/ A	No	No	Sí	No

*Esta tabla muestra los criterios de selección de la técnica del valor del dinero en el tiempo según una adaptación de Jalbert (2002).*

Algunos estudiantes experimentan dificultades para comprender y aplicar las técnicas de anualidad. Como se señaló anteriormente, esto se deriva en parte del uso de los términos principio, fin, anualidad ordinaria y anualidad vencida al describir los flujos de efectivo de la anualidad. También puede ocurrir porque las personas se sienten abrumadas con la cantidad de técnicas disponibles. Si bien los cálculos de anualidades brindan poder adicional, es posible que algunas personas no requieran la gama completa de capacidades que brindan las técnicas de anualidades. Estos usuarios pueden usar un método simplificado que trata las anualidades como casos especiales de flujos de efectivo desiguales. Jalbert, Jalbert y Chan (2004) proporcionan una modificación a la técnica de Jalbert (2002) que incorpora este enfoque reducido. La Figura 2 y la Tabla 2 muestran una adaptación de la técnica revisada. El enfoque reducido simplifica el proceso de selección de TVM al eliminar por completo la técnica de la anualidad. El modelo reducido da como resultado una limitación. Las calculadoras financieras pueden resolver los montos de los pagos y el número de observaciones en una anualidad. Sin embargo, no pueden hacerlo cuando utilizan la herramienta de flujo de caja desigual. La versión simplificada resulta valiosa para aquellos que no necesitan estas capacidades.

### HERRAMIENTA DE SELECCIÓN DE LA TÉCNICA MODIFICADA DEL VALOR DEL DINERO EN EL TIEMPO

Comenzamos el análisis proporcionando una nueva herramienta gráfica que guía a los usuarios a través de las preguntas necesarias para clasificar correctamente un problema de valor del dinero en el tiempo. Este documento amplía el trabajo de Jalbert 2002 y Jalbert, Jalbert y Chan (2004), ampliando la herramienta de selección gráfica para incluir anualidades crecientes.

En concreto, la nueva herramienta modifica la herramienta de Jalbert (2002) al incorporar la técnica de la anualidad creciente. La figura 3 proporciona la herramienta. La nueva característica se incorpora bajo la pregunta de la misma cantidad en dólares en la fila superior de la figura. La figura muestra que una anualidad creciente implica una corriente de flujos de efectivo, limitada en número, con el mismo espacio de tiempo entre cada flujo de efectivo. Sin embargo, los flujos de efectivo no son iguales entre sí; los flujos de efectivo crecen a una tasa porcentual constante. La Tabla 3 indica las características de cada técnica disponible del valor del dinero en el tiempo. Los usuarios hacen referencia a la Tabla 3 como una alternativa a la herramienta gráfica para seleccionar técnicas apropiadas de valor del dinero en el tiempo (TVM).

### INFORMACIÓN Y METODOLOGÍA

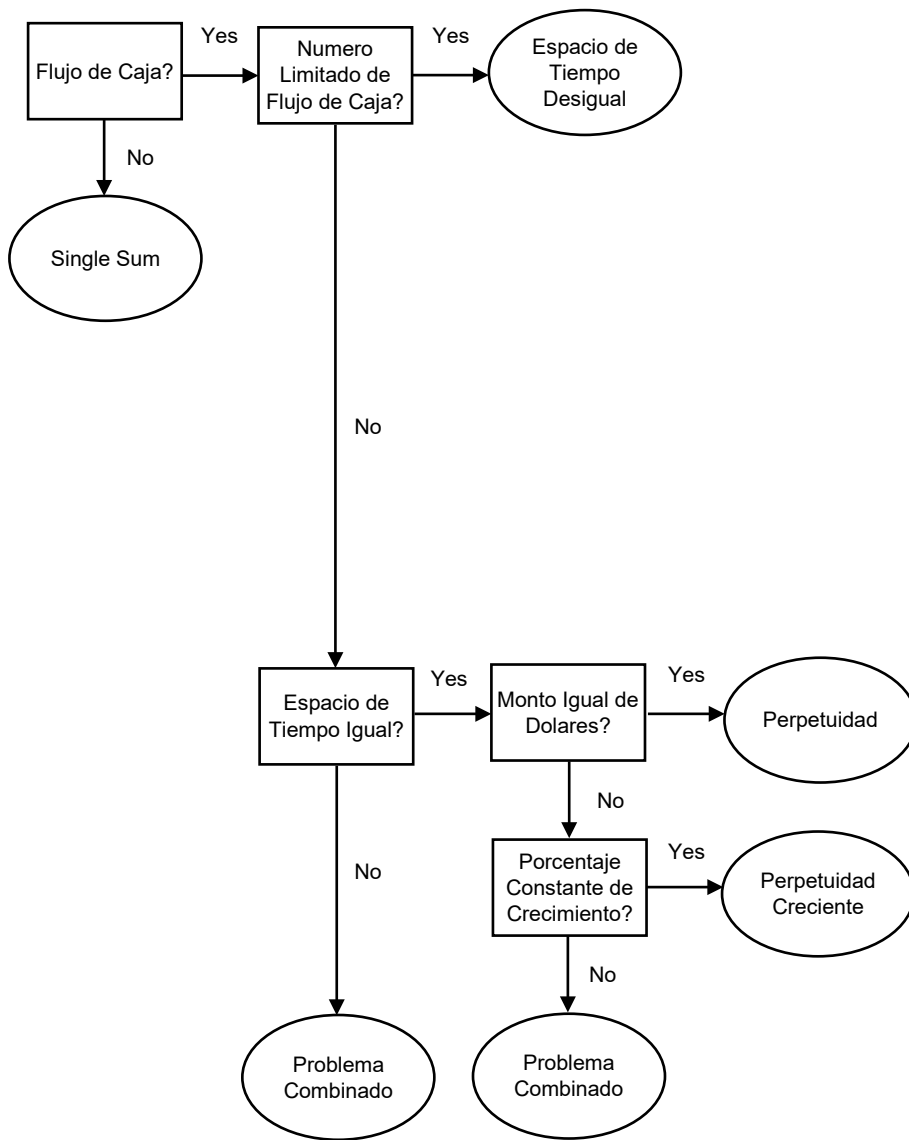
El análisis continúa evaluando los libros de texto de finanzas para identificar la creciente cobertura de anualidades y la medida en que los libros de texto incluyen herramientas de selección de técnicas gráficas de valor del dinero en el tiempo (TVM). La encuesta examina los libros de texto de finanzas corporativas introductorias e intermedias junto con los libros de texto de finanzas personales. La muestra de libros de texto considerada es una muestra de conveniencia de quince textos. La muestra incluye trece textos de

finanzas corporativas y dos textos de finanzas personales. Los derechos de autor sobre los textos van desde 2000-2019.

La encuesta examina ocho características de los textos, siete relacionadas con presentaciones de anualidades crecientes y una relacionada con la inclusión de una herramienta gráfica para ayudar a los usuarios a seleccionar una técnica de TVM adecuada. El primer ítem de la encuesta determina si el texto aborda la anualidad ordinaria creciente básica. Para aquellos textos que sí presentan la técnica de la anualidad creciente, examinamos una serie de temas de seguimiento. El primero identifica si el texto también aborda los cálculos de anualidades vencidas crecientes. Los siguientes tres elementos evalúan si la presentación incluye la resolución del valor presente, el pago o el valor futuro de una anualidad creciente.

El siguiente elemento examina si la presentación demuestra cómo resolver otras variables en la anualidad creciente, incluido el número de períodos, la tasa de crecimiento y la tasa de descuento. A continuación, examinamos cómo el texto aborda los cálculos. Hay tres opciones básicas disponibles, incluido el método de fórmula, el método de hoja de cálculo y el método de calculadora. Finalmente, la encuesta examina si los textos incluyen una herramienta de selección gráfica, similar a la sugerida en esta investigación.

Figura 2: Herramienta de Selección de la Técnica del Valor del Dinero en el Tiempo Excluyendo las Anualidades (Jalbert, Jalbert y Chan, 2004)



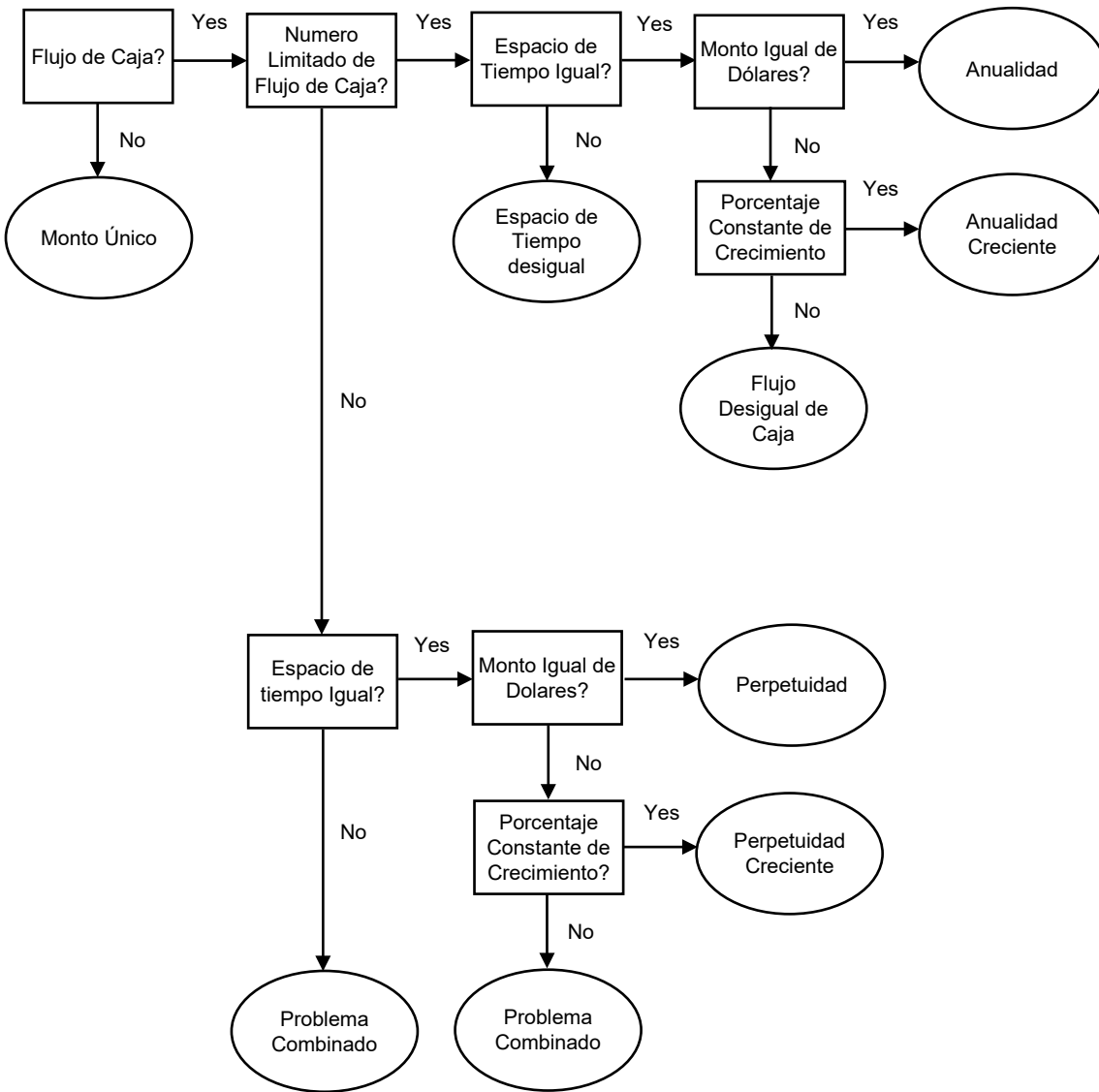
Esta figura muestra la herramienta de selección de técnicas de valor temporal del dinero adaptada de Jalbert, Jalbert y Chan (2004).

Tabla 2: Tabla Modificada Para la Clasificación de Flujos de Efectivo

	Suma Única	Perpetuidad	Perpetuidad Creciente	Flujo de Efectivo Desigual
Serie de Flujos de Efectivo	No	Sí	Sí	Sí
Número limitado de flujos de efectivo	Sí	No	No	Sí
Cada flujo de efectivo es por una cantidad igual de \$	N / A	Sí	No	Sí o no
Intervalo de tiempo igual entre flujos de caja	N / A	Sí	Sí	Sí o no
Los flujos de efectivo crecen a una tasa de porcentaje constante	N / A	No	Sí	No

Esta tabla muestra los criterios de selección del valor del dinero en el tiempo adaptados de Jalbert, Jalbert y Chan (2004).

Figura 3: Herramienta de Selección de la Técnica del Valor Temporal del Dinero, Incluidas las Anualidades Crecientes



*Esta figura muestra la herramienta de selección de la técnica del valor del dinero en el tiempo desarrollada aquí. La figura amplía trabajos anteriores incorporando la técnica de la anualidad creciente.*



Tabla 3: Clasificación de los Problemas del Valor del Dinero en el Tiempo

	Suma Única	Anualidad	Creciente Anualidad	Flujo de Efectivo Desigual	Perpetuidad	Perpetuidad Creciente
Serie de Flujos de Efectivo	No	Sí	Sí	Sí	Sí	Sí
Número limitado de flujos de efectivo	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No
Cada flujo de efectivo es por una cantidad igual de \$	N / A	Sí	No	No	Sí	No
Intervalo de tiempo igual entre flujos de caja	N / A	Sí	Sí	No	Sí	Sí
Los flujos de efectivo crecen a una tasa de porcentaje constante	N / A	No	Sí	No	No	Sí

*Esta tabla muestra la herramienta de selección de la técnica del valor del dinero en el tiempo desarrollada que incluye la técnica de la anualidad creciente.*

## RESULTADOS

La Tabla 4 muestra los resultados de la encuesta. Los resultados revelan que las anualidades crecientes reciben poca atención en los libros de texto de finanzas. Las anualidades crecientes no se presentan comúnmente en los libros de texto. Solo tres de los trece textos de finanzas corporativas encuestados abordan el tema de las rentas de anualidades crecientes. Ross, Westerfield , Jaffe y Jordan 2007, p. 115-116, Berk y DeMarzo 2014, pág. 118-119 y los textos de Brigham y Ehrhardt (2017) sí presentan cálculos de anualidades crecientes. Ninguno de los textos de finanzas personales presenta anualidades crecientes.

Berk y Demarzo (2014) y Ross Westerfield , Jaffe y Jordan 2007 adoptan enfoques similares para las rentas de anualidades crecientes. Ambos textos demuestran el cálculo de los valores presentes y futuros de una anualidad creciente. No abordan las anualidades vencidas, resolviendo montos de pago o resolviendo otras variables. Su presentación se realiza con fórmulas. Brigham y Ehrhardt (2017) brindan posiblemente la cobertura más completa de las rentas anualidades crecientes. Su texto cubre tanto las anualidades crecientes ordinarias como las anualidades crecientes vencidas. Demuestran el valor actual y los cálculos de pago. No demuestran cómo resolver el valor futuro u otras variables. Utilizan un método de calculadora indirecta para demostrar sus cálculos. Ninguno de los textos consultados demuestra cálculo de número de períodos, tasa de crecimiento o tasa de descuento. En general, la encuesta muestra que ningún texto proporciona una cobertura completa de la técnica de anualidad creciente. A pesar de la falta general de atención que reciben las rentas de anualidades crecientes, constituyen una herramienta importante en el arsenal del valor temporal del dinero (TVM).

El examen de los textos para la presencia de una herramienta de selección de técnicas gráficas revela que ninguno de los textos encuestados incorpora una herramienta de selección gráfica. Esto es sorprendente dada la claridad adicional que proporciona una herramienta de selección gráfica. Esta claridad adicional es particularmente importante para los jubilados que desean una corriente de flujos de efectivo para una vida finita que aumenta anualmente a la tasa de inflación.

Tabla 4: Encuesta de Libros de Texto Sobre Cobertura de Anualidades Crecientes y Herramienta de Selección de Técnicas Gráficas

Texto	Anualidades Ordinarias Crecientes	Anualidades Crecientes Vencidas	Resolver Para el Valor Presente	Resolver Para el Pago	Resolver Valor Futuro	Resolver Para Otras Variables	Método de Cálculo	Herramienta de Selección Gráfica
<b>Panel A: Textos de Finanzas Corporativas</b>								
Berk y Demarzo, 2014	Sí	No	Sí	No	Sí	No	Fórmula	No
Besley y Brigham, 2015	No	No	No	No	No	No		No
Bodie y Merton, 2000	No	No	No	No	No	No		No
Brigham v Daves, 2002	No	No	No	No	No	No		No
Brigham y Ehrhardt, 2017	Sí	Sí	Sí	Sí	No	No	Calculadora Indirecta	No
Brigham y Houston, 2019	No	No	No	No	No	No		No
Arroyos, 2016	No	No	No	No	No	No		No
Foerster, S., 2015	No	No	No	No	No	No		No
Gitman, 2003	No	No	No	No	No	No		No
Keown, Martín y Petty, 2014	No	No	No	No	No	No		No
Moyer, Mcguigan y Rao, 2015	No	No	No	No	No	No		No
Ross, Westerfield, Jaffe y Jordan, 2007	Sí	No	Sí	Sí	No	No	Fórmula	No
Inteligente, Megginson y Gitman, 2007	No	No	No	No	No	No		No
<b>Panel B: Textos de Finanzas Personales</b>								
Gitman, Joehnk y Billingsley, 2016	No	No	No	No	No	No		No
Madura, 2006	No	No	No	No	No	No		No

Esta tabla proporciona un examen de la cobertura de los libros de texto de finanzas de las anualidades crecientes. También muestra hasta qué punto los textos proporcionan una herramienta de selección gráfica para identificar técnicas apropiadas de valor del dinero en el tiempo. Los textos seleccionados para su inclusión representan una muestra de conveniencia.

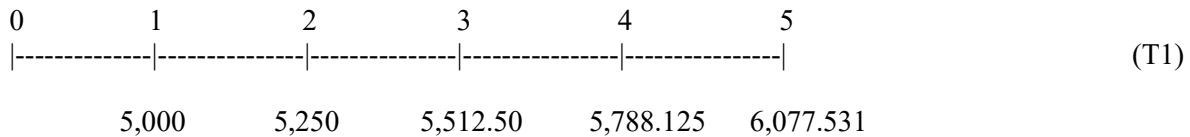
## ANUALIDADES CRECIENTES

Esta sección muestra cálculos de anualidades crecientes. La discusión se suma a la literatura existente al agregar varios cálculos presentados anteriormente en una sola ubicación para facilitar el acceso. También proporciona cálculos relevantes que no se han presentado previamente en los libros de texto o en la literatura existente.

Recuerde que una anualidad creciente tiene las siguientes características: 1. Hay una serie de flujos de efectivo, 2. El número de flujos de efectivo es limitado, 3. Hay un espacio de tiempo igual entre cada flujo de efectivo, 4. Cada flujo de efectivo no es por una cantidad igual, y 5. Los flujos de efectivo aumentan en una cantidad porcentual constante en cada año subsiguiente. Las anualidades crecientes difieren de las anualidades estándar. Una anualidad creciente incluye pagos periódicos crecientes. Por el contrario, una anualidad estándar se caracteriza por pagos periódicos iguales. Las anualidades crecientes también difieren de las perpetuidades crecientes. Tanto una perpetuidad creciente como una anualidad creciente tienen pagos periódicos crecientes. Sin embargo, los pagos de perpetuidad crecientes continúan hasta el infinito, mientras que los pagos de anualidades crecientes tienen un punto final definido.

Volvamos al ejemplo de anualidad creciente presentado anteriormente. Recuerde el ejemplo de la anualidad creciente que involucró una serie de flujos de efectivo anuales. El primer flujo de efectivo es igual a \$5,000, recibido dentro de 1 año a partir de hoy. Los flujos de efectivo aumentan en un cinco por ciento cada año

durante los siguientes cuatro años, para un total de cinco pagos. La línea de tiempo T1 representa los flujos de efectivo.



Cálculos Basados en Valores Futuros

Examinamos las anualidades crecientes calculando los parámetros habituales del valor del dinero en el tiempo (TVM). Comenzamos con la fórmula para el valor futuro (FV) de la anualidad creciente. Considere una anualidad creciente donde  $PMT_1$  es igual al pago recibido dentro de un año a partir de hoy,  $PMT_0$  es igual al pago recibido dentro de un minuto,  $N$  es igual a la cantidad de años en que se realizarán los pagos,  $I$  es igual al interés devengado por las inversiones y  $G$  es igual a la tasa de crecimiento de las inversiones.  $FVGOA$  indica el valor futuro de una anualidad ordinaria creciente y  $FVGAD$  indica el valor futuro de una anualidad creciente vencida. Las ecuaciones 1 y 2 muestran cálculos para  $FVGOA$  y  $FVGAD$  respectivamente:

$$FVGOA = PMT_1 \left( \frac{(1+I)^N - (1+G)^N}{I-G} \right) \tag{1}$$

$$FVGAD = PMT_0 (1 + I) \left( \frac{(1+I)^N - (1+G)^N}{I-G} \right) \tag{2}$$

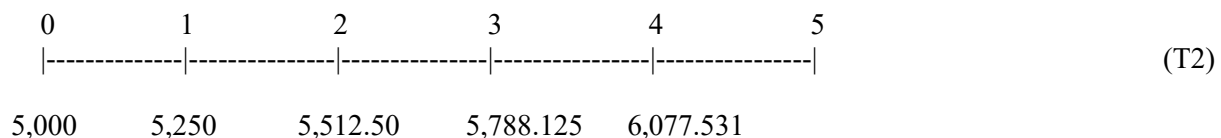
Para demostrar el cálculo de la Ecuación 1, considere la anualidad creciente mencionada anteriormente. Además, tenga en cuenta que la tasa de interés ganada en las inversiones es igual al 7 por ciento. Entonces el valor futuro de la anualidad creciente es igual a:

$$FVGOA = 5,000 \left( \frac{(1 + 0.07)^5 - (1 + 0.05)^5}{0.07 - 0.05} \right)$$

$$FVGOA = 5,000 \left( \frac{1.402551731 - 1.276281562}{0.02} \right) = 31,567.54213$$

Por lo tanto, un inversor que realice los pagos indicados en el problema acumulará \$31.567,54213 al final del quinto año.

Supongamos ahora, en el problema anterior, que el primer pago se produce en el momento cero en lugar de en el momento 1. El número total de flujos de efectivo sigue siendo cinco y deseamos saber el valor de la corriente al final del quinto año. La línea de tiempo T2 representa los flujos de efectivo de la siguiente manera:



En este caso, el enfoque  $FVGAD$ , dado por la Ecuación 2, se aplica con cálculos que equivalen a:

$$FVGAD = 5,000(1 + 0.07)\left(\frac{(1+0.07)^5 - (1+0.05)^5}{0.07-0.05}\right) \quad (2)$$

$$FVGAD = 5,000(1 + 0.07)\left(\frac{1.402551731-1.276281562}{0.02}\right) = 33,777.27021$$

Por lo tanto, un inversionista que haga los depósitos como se indica acumulará \$33,777.27021 al final del 5<sup>to</sup> año.

Al reorganizar las fórmulas, se resuelve el pago inicial cuando se conoce el valor futuro, la tasa ganada sobre las inversiones, el crecimiento y la cantidad de períodos de la siguiente manera para una anualidad creciente ordinaria y una anualidad creciente vencida, respectivamente:

$$PMT_1 = \frac{FVGOA}{\left(\frac{(1+I)^N - (1+G)^N}{I-G}\right)} \quad (3)$$

$$PMT_0 = \frac{FVGAD}{(1+I)\left(\frac{(1+I)^N - (1+G)^N}{I-G}\right)} \quad (4)$$

Para demostrar el uso de la Ecuación 3, considere un inversionista que desea acumular 31,567.54213, dentro de cinco años. El inversionista realiza cinco pagos anuales en la cuenta para lograr el objetivo; el primer pago se realiza dentro de un año a partir de hoy y el último pago se realiza dentro de cinco años. Los pagos aumentan un cinco por ciento al año. La cuenta paga siete por ciento de interés anual. El inversionista desea saber el monto del primer pago necesario para lograr la meta. La siguiente ecuación resuelve el monto del pago inicial:

$$PMT_1 = \frac{31,567.54213}{\left(\frac{(1+0.07)^5 - (1+0.05)^5}{0.07-0.05}\right)}$$

$$PMT_1 = \frac{31,567.54213}{\left(\frac{1.402551731-1.276281562}{0.02}\right)} = \$5,000$$

De manera similar, si los pagos ocurren al comienzo de cada año, como en el caso de una anualidad creciente vencida, resolvemos la ecuación 4 de la siguiente manera:

$$PMT_0 = \frac{33,777.27021}{(1+0.07)\left(\frac{(1+0.07)^5 - (1+0.05)^5}{0.07-0.05}\right)}$$

$$PMT_0 = \frac{33,777.27021}{(1+0.07)\left(\frac{1.402551731-1.276281562}{0.02}\right)} = 5,000$$

### Cálculos Basados en Valor Presente

A continuación, calculamos los valores presentes. Las ecuaciones 5 y 6 muestran fórmulas para calcular el valor presente de una anualidad ordinaria creciente y una anualidad creciente vencida, respectivamente:

$$PVGOA = \frac{PMT_1}{I-G} \left[1 - \left(\frac{1+G}{1+I}\right)^N\right] \quad (5)$$

$$PVGAD = \frac{PMT_0(1+G)}{I-G} \left[1 - \left(\frac{1+G}{1+I}\right)^{N-1}\right] + PMT_0 \quad (6)$$

Considere a un inversionista que desea retirar \$5,000 de una cuenta al final del primer año. El inversionista continúa retirando fondos de la cuenta anualmente durante cada uno de los próximos cuatro años, para un total de cinco pagos. Los pagos aumentan un cinco por ciento anual y la cuenta paga un interés del siete por ciento anual. El inversionista desea saber el depósito requerido hoy para lograr este objetivo. La ecuación 5 calcula el valor presente de la anualidad ordinaria creciente de la siguiente manera:

$$PVGOA = \frac{5,000}{.07-.05} \left[ 1 - \left( \frac{1+.05}{1+.07} \right)^5 \right] = 22,507.2212$$

El resultado indica que lograr una anualidad creciente de cinco años como se especifica requiere un depósito inicial de \$22,507.2212.

A continuación, considere a un inversionista que desea retirar \$5,000 de una cuenta al comienzo del primer año. El inversionista continúa retirando fondos de la cuenta anualmente cada uno de los próximos cuatro años, para un total de cinco pagos. Los pagos aumentan un 5 por ciento anual y la cuenta paga un interés del siete por ciento anual. El inversionista desea saber el depósito requerido hoy para lograr este objetivo. La ecuación 6 calcula el valor presente de la anualidad ordinaria creciente de la siguiente manera:

$$PVGAD = \frac{5,000(1+0.05)}{0.07-0.05} \left[ 1 - \left( \frac{1+0.05}{1+0.07} \right)^{5-1} \right] + 5,000 = 24,082,72669$$

El resultado indica que lograr la anualidad creciente de cinco años, como se especifica, requiere un depósito inicial de \$24,082.72669.

La presentación continúa proporcionando fórmulas alternativas para calcular los montos de los pagos en una anualidad creciente. Las ecuaciones 7 y 8 proporcionan fórmulas para calcular el pago inicial de la anualidad creciente con un valor presente conocido. Reordenando las ecuaciones 5 y 6 se resuelve el monto del pago como se muestra en las Ecuaciones 7 y 8 para una anualidad ordinaria creciente y una anualidad vencida creciente respectivamente.

$$PMT_1 = \frac{PVGOA}{\left[ 1 - \left( \frac{1+G}{1+I} \right)^N \right]} (I - G) \quad (7)$$

$$PMT_0 = \frac{PVGAD}{\frac{1+G}{I-G} \left[ 1 - \left( \frac{1+G}{1+I} \right)^{N-1} \right] + 1} \quad (8)$$

Para demostrar el uso de la Ecuación 7, considere un inversionista con 22,507.2212 una cuenta que paga un interés del siete por ciento anual. El inversionista retira pagos anuales de la cuenta al final de los siguientes cinco años para vaciar la cuenta. Los pagos crecen a una tasa del cinco por ciento anual. ¿Cuánto puede retirar el inversor de la cuenta al final del primer año? La ecuación 7 calcula el pago de tiempo cero de la siguiente manera:

$$PMT_1 = \frac{22,507.2212}{\left[ 1 - \left( \frac{1+0.05}{1+0.07} \right)^5 \right]} (0.07 - 0.05) = 5,000$$

Para demostrar el uso de la Ecuación 8, considere un inversionista con \$24,082.72669 en una cuenta que paga 7 por ciento de interés por año. El inversionista retira pagos anuales de la cuenta al comienzo de los siguientes 5 años para vaciar la cuenta. Los pagos crecen a una tasa del 5 por ciento anual. ¿Cuánto puede retirar el inversor de la cuenta al comienzo del primer año? La ecuación 8 calcula el pago en el tiempo cero de la siguiente manera:

$$PMT_0 = \frac{24,082.72669}{\frac{1+0.05}{0.07-0.05} \left[ 1 - \left( \frac{1+0.05}{1+0.07} \right)^4 \right] + 1} = 5,000$$

Continuamos con fórmulas para resolver  $N$  en una anualidad creciente con un valor presente conocido. Hasta donde sabemos, esta presentación representa la primera discusión de la fórmula para completar la tarea. Las ecuaciones 9 y 10 muestran las fórmulas para calcular  $N$  en una anualidad ordinaria creciente y una anualidad creciente vencida, respectivamente.

$$N = \ln - \left[ \frac{PVGOA}{\left( \frac{PMT_1}{I-G} \right)} - 1 \right] * \left[ \frac{1}{\ln\left( \frac{1+G}{1+I} \right)} \right] \tag{9}$$

$$N = \left\{ \ln - \left[ \left( \frac{(PVGAD - PMT_0) * (I-G)}{PMT_0(1+G)} \right) - 1 \right] * \left[ \frac{1}{\ln\left( \frac{1+G}{1+I} \right)} \right] \right\} + 1 \tag{10}$$

Para demostrar el uso de la Ecuación 9, considere un inversionista que desea acumular 31,567.54213. El inversionista hará pagos anuales en la cuenta para lograr la meta; el primer pago de \$5,000 se realizará dentro de un año a partir de hoy y el último pago se realizará cuando se logre la meta. Los pagos aumentan un cinco por ciento anual y la cuenta paga un interés del siete por ciento anual. El inversionista desea saber cuánto tiempo tomará alcanzar la meta. La siguiente aplicación de la Ecuación 9 calcula el resultado:

$$N = \ln - \left[ \frac{22,507.2212}{\left( \frac{5,000}{(0.07-0.05)} \right)} - 1 \right] * \left[ \frac{1}{\ln\left( \frac{1+0.05}{1+0.07} \right)} \right] = 5$$

Así, bajo el escenario presentado, el inversor acumula \$31.567,54213 al final del 5º año.

Para demostrar el uso de la Ecuación 10, considere a un inversionista que desea acumular 31,567.54213. El inversionista realiza pagos anuales en una cuenta para lograr la meta; el primer pago de \$5,000 se realiza más tarde hoy y el último pago se realiza cuando se logra la meta. Los pagos aumentan un cinco por ciento anual y la cuenta paga un interés del siete por ciento anual. El inversionista desea saber cuánto tiempo tomará alcanzar la meta. La siguiente aplicación de la Ecuación 10 muestra el resultado:

$$N = \left\{ \ln - \left[ \left( \frac{(24,082.72669 - 5,000) * (0.07 - 0.05)}{5,000(1+0.05)} \right) - 1 \right] * \left[ \frac{1}{\ln\left( \frac{1+0.05}{1+0.07} \right)} \right] \right\} + 1 = 5$$

El resultado muestra que, bajo el escenario presentado, el inversor acumula \$24.082,72669 al final del 5º año.

### Resolviendo Para Otras Variables

En ocasiones es útil para calcular otras cantidades. Dadas las cantidades de pago cambiantes, los usuarios pueden desear conocer el pago en varios momentos de la anualidad creciente. Las ecuaciones 11 y 12 calculan el monto del pago en cualquier momento para una anualidad ordinaria creciente y una anualidad vencida creciente, respectivamente.

$$PMT_t = PMT_1(1 + G)^{N-1} \tag{11}$$

$$PMT_t = PMT_0(1 + G)^N \tag{12}$$

La primera introducción conocida de la Ecuación 11 fue realizada por Finance Formulas.Net (2023). Esta es la primera presentación conocida de las Ecuaciones 12. Demostramos los cálculos usando el ejemplo anterior de anualidad creciente ordinaria para el pago en el momento cuatro, con un pago inicial de \$5,000 que crece a una tasa del 5 por ciento anual. Los cálculos muestran un valor futuro de \$5,788.125 como sigue:

$$PMT_4 = 5,000(1 + 0.05)^{4-1} = 5,788.125$$

Para demostrar el uso de la ecuación 12, usamos el ejemplo de anualidad vencida creciente mencionado anteriormente, con un pago en el Momento 0 de \$5,000 y una tasa de crecimiento del 5 por ciento anual, el pago en el Momento 4 es igual a:

$$PMT_4 = 5,000(1 + 0.05)^4 = \$6,077.531$$

Es posible resolver las ecuaciones para I, G. Sin embargo, no hay una fórmula directa disponible para resolver estas variables. Más bien, resolver estas variables es un proceso iterativo. Como tal, los usuarios deben variar los valores de la variable de interés, hasta lograr la solución correcta. Como se señaló anteriormente, Michael's Law Firm (2023) proporciona la única herramienta conocida disponible públicamente para resolver la cantidad de pagos, la tasa de crecimiento y la tasa de descuento para anualidades crecientes.

Por brevedad, nos limitamos a los cálculos anteriores. Sin embargo, la literatura existente proporciona herramientas de cálculo adicionales para trabajar con anualidades crecientes que pueden ser valiosas para algunos usuarios. Carbon Collective (2023) proporciona una fórmula para calcular el FV de una anualidad creciente cuando  $I = G$  como:

$$FVGOA = PMT_1 N(1 + r)^{N-1}$$

Taylor (1986) proporciona fórmulas para situaciones en las que la capitalización se produce más de una vez al año. Además, Taylor (1986) proporciona fórmulas para una situación en la que los pagos ocurren más de una vez al año pero aumentan anualmente.

#### Tabla de Valor de Anualidad Creciente

Los saldos anuales crecientes muestran patrones interesantes con implicaciones importantes para los inversores. Para demostrar estos patrones, examinamos una anualidad creciente a más largo plazo. Considere una anualidad ordinaria creciente, con un saldo inicial de \$100,000. El primer retiro anual de \$4,627.070927 ocurre al final del primer año y los pagos continúan por treinta años. La tasa de crecimiento anual de los retiros es del cinco por ciento. La cuenta paga un rendimiento del siete por ciento anual.

La Tabla 4 muestra el patrón de retiros y saldos de cuenta a lo largo del período de treinta años. La primera columna indica el año desde el 1 hasta los 30 años de vida de la anualidad creciente. El Beg.Balance, la columna de saldo indica los fondos del comienzo del año retenidos en la cuenta. La columna etiquetada Ganancias indica la cantidad de interés ganado en la cuenta durante el año. La columna denominada Retiro indica la cantidad de dinero retirado de la cuenta al final del año. Finalmente, la columna denominada Saldo final indica la cantidad de dinero que queda en la cuenta al final del año.

Tabla 4: Tabla de Valor de Anualidad Creciente

Año	Suplicar Saldo	Ganancias	Retiro	Saldo Final
1	100,000.00	7,000.00	4,627.07	102.372,93
2	102.372,93	7.166,11	4,858.42	104.680,61
3	104.680,61	7,327.64	5,101.35	106.906,91
4	106.906,91	7,483.48	5,356.41	109.033,98
5	109.033,98	7.632,38	5.624,23	111.042,12
6	111.042,12	7,772.95	5,905.45	112.909,63
7	112.909,63	7,903.67	6.200,72	114.612,58
8	114.612,58	8,022.88	6.510,75	116.124,71
9	116.124,71	8.128,73	6.836,29	117.417,15
10	117.417,15	8,219.20	7.178,11	118.458,24
11	118.458,24	8,292.08	7,537.01	119.213,31
12	119.213,31	8,344.93	7,913.86	119.644,38
13	119.644,38	8,375.11	8,309.55	119.709,93
14	119.709,93	8,379.70	8,725.03	119.364,59
15	119.364,59	8,355.52	9.161,28	118.558,83
16	118.558,83	8,299.12	9.619,35	117.238,60
17	117.238,60	8,206.70	10.100,32	115.344,99
18	115.344,99	8,074.15	10.605,33	112.813,80
19	112.813,80	7,896.97	11.135,60	109.575,17
20	109.575,17	7.670,26	11.692,38	105.553,06
21	105.553,06	7,388.71	12,277.00	100.664,77
22	100.664,77	7,046.53	12.890,85	94.820,46
23	94.820,46	6.637,43	13.535,39	87.922,50
24	87.922,50	6.154,58	14.212,16	79.864,92
25	79.864,92	5.590,54	14.922,77	70.532,70
26	70.532,70	4,937.29	15.668,90	59.801,08
27	59.801,08	4,186.08	16.452,35	47.534,81
28	47.534,81	3,327.44	17.274,97	33.587,28
29	33.587,28	2,351.11	18.138,72	17.799,67
30	17.799,67	1,245.98	19.045,65	0.00

*Esta tabla muestra el patrón de pago de una anualidad ordinaria creciente. La anualidad ordinaria creciente tiene un saldo inicial de \$100,000 y un retiro al final del Año 1 de \$4,627.070927. Los pagos continúan durante treinta años con una tasa de crecimiento de pago anual equivalente al cinco por ciento. La cuenta paga un rendimiento del siete por ciento anual.*



En la Tabla 4 se destaca un patrón. El lector cuidadoso notará que el saldo final aumenta durante los primeros trece años de la anualidad creciente de treinta años. Después del año trece el saldo disminuye hasta llegar a un saldo cero al final del año treinta. Este patrón es especialmente importante para los jubilados que planifican sus gastos de jubilación. Los jubilados se enfrentan a la tentación de aumentar sus gastos a la luz del aumento de los saldos de las cuentas en los años 1-13. Es importante que los jubilados reconozcan que este aumento en el saldo de la cuenta compensa el gasto planificado en años posteriores y no implica un mayor nivel de gasto inicial.

## COMENTARIOS FINALES

Las técnicas de anualidades crecientes brindan conocimientos y capacidades importantes a los planificadores financieros. Esto es especialmente cierto para los jubilados que desean crear un flujo de efectivo que aumente con la inflación a lo largo de su vida finita. Este documento proporciona un resumen completo de los métodos de cálculo de anualidades crecientes. También proporciona una herramienta gráfica para ayudar a los usuarios a identificar la técnica adecuada para aplicar a cualquier problema de valor del dinero en el tiempo (TVM). Las herramientas presentadas aquí brindan a los instructores una forma intuitiva de presentar técnicas de TVM que los estudiantes pueden comprender y dominar fácilmente.

Examinamos una muestra de conveniencia de libros de texto de introducción a las finanzas. Los resultados muestran que la mayoría de los textos no incorporan anualidades crecientes en su presentación. Además, los textos que sí incluyen anualidades crecientes brindan una discusión limitada. No obstante, las rentas anualidades crecientes representan una importante herramienta de TVM. Alentamos a los autores de libros de texto a que incorporen completamente la técnica de la anualidad creciente como se presenta aquí.

La encuesta revela además que los libros de texto no presentan una herramienta gráfica de selección de técnicas TVM. Estas herramientas proporcionan una forma sencilla para que los usuarios identifiquen el enfoque adecuado para resolver un problema. Alentamos a los autores de libros de texto a incorporar herramientas gráficas en sus presentaciones TVM para facilitar una mejor y más fácil comprensión de los estudiantes.

Observamos que ninguna calculadora financiera conocida incorpora anualidades crecientes en su conjunto de herramientas. Esto se mantiene a pesar de incorporar funciones similares, como anualidades y perpetuidades. La presencia de estas herramientas relacionadas sugiere que la incorporación de anualidades crecientes sería una tarea manejable. Alentamos a los fabricantes de calculadoras financieras a incorporar estas herramientas en las funciones de la calculadora.

## REFERENCIAS

Bagamery (2011) "A Calculator-Friendly Transformation Method for Valuing Finite Growing Annuities and Annuities Due, *Journal of Financial Education*, Vol. 37(1/2, Spring\Summer) p. 83-100

Berk J. and P. DeMarzo (2014), *Corporate Finance*, 3<sup>rd</sup> Ed. Pearson, Boston p. 118-121

Besley and Brigham (2015), *CFIN4*, 1<sup>st</sup> Edition, Cengage Learning, Stamford, CT, p. 57-72

Bloom, B. (1956). *Taxonomy of Educational Objectives, Handbook I: Cognitive Domain*, New York: McKay.

Bodie, Z., and R. C. Merton, (2000) *Finance*, 1<sup>st</sup> Ed. Upper Saddle River, New Jersey, Prentice-Hall

Brigham E.F and P.R. Daves (2002), *Intermediate Financial Management*, 7<sup>th</sup> Ed., South-Western, Thompson Learning, p. 370-415

Brigham, E. and M. Ehrhardt, *Financial Management Theory and Practice*, 15<sup>th</sup> Ed., Boston, Cengage Learning, 2017, p. 179-181

Brigham, E. F. and J. F. Houston, (2019), *Fundamentals of Financial Management*, 15<sup>th</sup> Ed., Cengage Learning, Boston, MA, p. 148-191

Brooks, R. M. (2016), *Financial Management Core Concepts*, 3<sup>rd</sup> Ed., Pearson Education, Inc., Upper Saddle River New Jersey, p. 54-143

Carbon Collective (2021) “Future Value of a Growing Annuity,” *Carbon Collective*, March 24, 3021. Accessed February 9, 2023 from: <https://www.carboncollective.co/sustainable-investing/future-value-of-a-growing-annuity>

Eddy, Albert and Gene Swanson (1996), “A Hierarchy of Skills Approach to Teaching Accounting Present Value,” *Journal of Accounting Education* 14(1) p. 123-131

Finance Formulas (2023) “Growing Annuity Payment – PV,” Accessed on February 10, 2023 from: <https://www.financeformulas.net/Growing-Annuity-Payment.html#:~:text=The%20formula%20for%20calculating%20the%20initial%20payment%20on,shown%20directly%20above%20C%20which%20can%20be%20shown%20as>

Foerster, S. (2015) *Financial Management Concepts and Applications*, 1<sup>st</sup> Ed., Pearson Education, Inc., Upper Saddle River New Jersey, p. 129-166

Gardner, N.D. (2004) “The Time Value of Money: A Clarifying and Simplifying Approach,” *Journal of College Teaching & Learning*, Vol. 1(7), p. 25-29

Gitman, L.J. (2003) *Principles of Managerial Finance*, 10<sup>th</sup> Ed., Pearson Education, Inc. Boston, MA, p. 148-211

Gitman, L.J., M.D. Joehnk and R.S. Billingsley, (2016), *PFIN 4*, 1<sup>st</sup> Ed., Cengage, Boston, MA, p. 45-50

Hall, P.L. (1996) “Growing Annuities and the Financial Calculator,” *Journal of Financial Education*, Vol 22, pl 73-75

Jalbert, Terrance (2002) “A New Method for Teaching the Time Value of Money,” Terrance Jalbert, *Journal of the American Academy of Business, Cambridge* Vol. 2(1), September 2002 p. 72-79

Jalbert, Terrance, Mercedes Jalbert and Wai Yee Canri Chan (2004) “Advances in Teaching the Time Value of Money,” *Journal of College Teaching and Learning*, Vol. 1(8), August, p. 7-12

Keown, A., J.D. Martin, and J. W. Petty, *Foundations of Finance: The Logic and Practice of Financial Management*, 8<sup>th</sup> Ed., Upper Saddle River, New Jersey, Pearson Education Inc, 2014

Madura, J. (2006), *Personal Finance, 2nd Ed.*, Pearson, Addison Wesley, Boston, MA, p. 59-84

Martinez, Valeria, (2013) “Time Value of Money Made Simple: A Graphic Teaching Method,” *Journal of Financial Education*, Vol. 39 N 1/2, Spring/Summer, p. 96-117

Mayes, T. R. (2023) “Graduated Annuities on the BAI Plus,” *TVMCalcs.com* accessed February 6, 2023 at: <http://www.tvmcalcs.com/index.php/calculators/apps/ti-baii-plus-graduated-annuities>

Michael’s Law Firm (2023) “Future Value of Growing Annuity Calculators – Ordinary Growing Annuity and Growing Annuity Due,” Viewed, March 17, 2023 at: <https://www.michaelsfirm.ca/future-value-of-growing-annuity-calculators-ordinary-growing-annuity-and-growing-annuity-due/>

Moyer, R. C., J.R. McGuigan, and R. Rao, *Contemporary Financial Management*, Stamford, CT, Cengage Learning, 13e, 2015

Omni Calculator (2023) accessed February 6, 2023 at: <https://www.omnicalculator.com/finance/growing-annuity>

Ross, Stephen A., Randolph W. Westerfield Jeffrey F. Jaffee and Bradford D. Jordon (2007) , *Corporate Finance: Core Principles and Applications*, New York, NY, McGraw-Hill Irwin, Inc. p. 115-116

Smart, S.B., W.L. Megginson, and L.J. Gitman (2007) *Corporate Finance*, 2<sup>nd</sup> Ed. Thompson Southwestern, Mason, OH, p. 72-121

Taylor, R. (1986) “Future Value of a Growing Annuity: A Note,” *Journal of Financial Education*, Vol. 15 p. 17-21

## BIOGRAFÍAS

Terrance Jalbert, Ph.D. es Profesor de Finanzas en la University of Hawaii Hilo. También se desempeña como árbitro de la Autoridad Reguladora de la Industria Financiera (FINRA). Su investigación aparece en revistas como *International Journal of Finance*, *American Business Review*, *Financial Services Review*, *Journal of Personal Finance*, *Advances in Taxation*, *Journal of Emerging Markets*, *Latin American Business Review*, *Journal of Applied Business Research* y *The International Journal of Business and Finance Research*. Puede comunicarse con él a University of Hawaii Hilo, 200 West Kawili St., Hilo, HI 96720.

Jonathan D. Stewart, Ph.D. CFA es A. Overton Faubus Profesor de Finanzas en Abilene Christian University. Su investigación aparece en revistas que incluyen *Economic Review / Banco de la Reserva Federal de Atlanta*, *Management Accounting Quarterly*, *The Journal of Financial Research*, *The Journal of Investing*, *Journal of Economics and Finance Education*, *Advances in Financial Education*, *Journal of Corporate Treasury Management*, *International Journal of Business and Finance Research*, *Journal of Applied Business Research*. Puede comunicarse con él a Abilene Christian University, ACU Box 29313, Abilene, TX, 79602.